Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2022, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Considera la función continua f definida por

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Calcula a y b.**
b) **Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.**

Solución:

a) **Calcula a y b.**

Debido a que las tres ramas de la función están definidas de forma continua (cocientes cuyos denominadores no se anulan y polinomio), para que la función $f(x)$ sea continua, debe ser continua en los puntos donde cambia su definición, es decir, en $x = -1$ y $x = 1$.

Continuidad en $x = -1$:

- El límite de la función cuando x se acerca a -1 por la izquierda debe ser igual al límite cuando x se acerca a -1 por la derecha, y también igual al valor de la función en $x = -1$.
- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (ax + b) = a(-1) + b = -a + b.$$

- Valor de la función en $x = -1$:

$$f(-1) = a(-1) + b = -a + b.$$

- Para que la función sea continua en $x = -1$, los límites deben ser iguales:

$$-a + b = -1.$$

Continuidad en $x = 1$:

- El límite de la función cuando x se acerca a 1 por la izquierda debe ser igual al límite cuando x se acerca a 1 por la derecha, y también igual al valor de la función en $x = 1$.
- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax + b) = a(1) + b = a + b.$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

- Valor de la función en $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

- Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites deben ser iguales:

$$a + b = \frac{1}{2}.$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -a+b & = -1 \\ a+b & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$(-a+b)+(a+b) = -1+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2b = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{4}.$$

Sustituyendo el valor de b en la segunda ecuación:

$$a+\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, los valores de a y b que hacen que la función sea continua son:

$$\boxed{a = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}}$$

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

Con los valores de a y b calculados, la función es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales:

- Para $x < -1$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

  Por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
- Para $-1 \leq x < 1$: Esta parte de la función es un segmento de una línea recta, por lo que no tiene asíntotas horizontales.
- Para $x \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1}.$$

  Dividiendo el numerador y el denominador por x:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.$$

  Por lo tanto, no hay asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Asíntotas verticales:

- Para $x < -1$: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene una posible asíntota vertical en $x = 0$, pero este valor no está en el dominio $x < -1$. Estudiamos el límite cuando x se acerca al extremo del intervalo:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = -1.$$

  No hay asíntota vertical en este intervalo.

– Para $-1 \leq x < 1$: La función $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ es una función lineal, por lo que no tiene asíntotas verticales. Estudiamos los límites en los extremos del intervalo:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}(-1) - \frac{1}{4} = -1,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}(1) - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

No hay asíntota vertical en este intervalo.

– Para $x \geq 1$: La función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ tiene un denominador que se anula en $x = -1$. Sin embargo, este valor no pertenece al dominio $x \geq 1$. No hay ningún valor de $x \geq 1$ para el cual el denominador sea cero. Estudiamos el límite cuando x se acerca al extremo del intervalo:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

No hay asíntota vertical en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:

– Para $x < -1$: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene una asíntota horizontal $y = 0$, por lo que no tiene asíntota oblicua.
– Para $-1 \leq x < 1$: La función es lineal, por lo que no tiene asíntota oblicua.
– Para $x \geq 1$: Buscamos una asíntota de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{x}} = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = x - 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

Por lo tanto, las asíntotas de la gráfica de f son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Asíntota horizontal:} \quad y = 0 \quad \text{cuando } x \to -\infty \\ \text{Asíntota oblicua:} \quad y = x - 1 \quad \text{cuando } x \to +\infty \end{array}}$$

Ejercicio 2. Análisis

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $\mathbf{f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$, definidas por $\mathbf{f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}}$ y $\mathbf{g(x) = \frac{x^2}{6} - 2}$.

Solución:

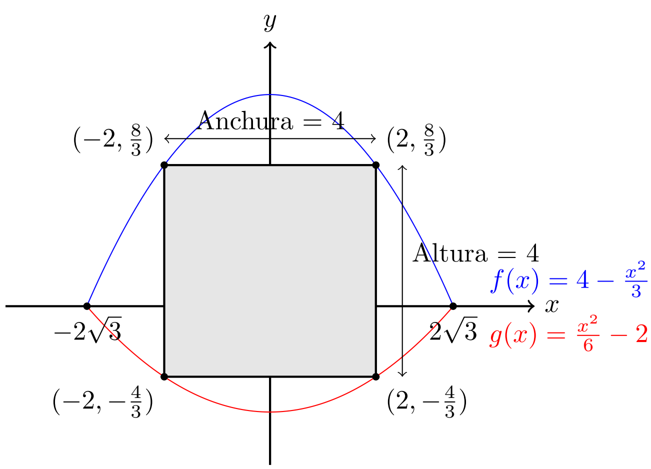
Para encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito entre las gráficas de $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$, primero necesitamos determinar la región limitada por estas dos funciones. Para ello, encontramos los puntos de intersección de las gráficas igualando las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2.$$

Sumamos 2 a ambos lados y sumamos $\frac{x^2}{3}$ a ambos lados:

$$4 + 2 = \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{3} \quad \Rightarrow \quad 6 = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Los puntos de intersección están en $x = -2\sqrt{3}$ y $x = 2\sqrt{3}$. Consideremos un rectángulo inscrito en esta región con lados paralelos a los ejes de coordenadas. Debido a la simetría de las funciones, podemos suponer que los vértices superiores del rectángulo tienen coordenadas $(-x, f(x))$ y $(x, f(x))$ para algún x con $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, y los vértices inferiores tienen coordenadas $(-x, g(x))$ y $(x, g(x))$:



La anchura del rectángulo es la distancia entre las coordenadas x de los lados verticales, que es:

$$x - (-x) = 2x.$$

La altura del rectángulo es la distancia vertical entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Para que el rectángulo esté inscrito, debemos tener $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-x, x]$. Ya verificamos que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$. La altura del rectángulo es:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right) = 4 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6} + 2 = 6 - \frac{x^2}{2}.$$

El área del rectángulo es el producto de su anchura y su altura:

$$A(x) = \text{anchura} \cdot \text{altura} = (2x)\left(6 - \frac{x^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad A(x) = 12x - x^3.$$

Para encontrar el área máxima, derivamos $A(x)$ con respecto a x y la igualamos a cero:

$$A'(x) = \frac{d}{dx}(12x - x^3) = 12 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

Como estamos considerando la mitad de la anchura del rectángulo y debe ser positiva, tomamos $x = 2$. Además, $0 \leq 2 \leq 2\sqrt{3}$, por lo que este valor está dentro del intervalo posible. Para verificar que este valor de x corresponde a un máximo, calculamos la segunda derivada de $A(x)$:

$$A''(x) = \frac{d}{dx}(12 - 3x^2) = -6x.$$

Evaluamos la segunda derivada en $x = 2$:

$$A''(2) = -6(2) = -12.$$

Como $A''(2) < 0$, la función área tiene un máximo en $x = 2$. Ahora podemos encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima:

- Anchura: $2x = 2(2) = 4$ u.
- Altura: $h(2) = 6 - \frac{2^2}{2} = 6 - \frac{4}{2} = 6 - 2 = 4$ u.

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$\boxed{\text{4 u de anchura y 4 u de altura}}$$

Ejercicio 3. Análisis

Sea f la función definida por

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x<0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

Solución:

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.

Los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas son aquellos puntos donde $f(x)=0$. Consideramos los dos casos de la función definida a trozos:

Caso 1: $x<0$

$$f(x)=2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2.$$

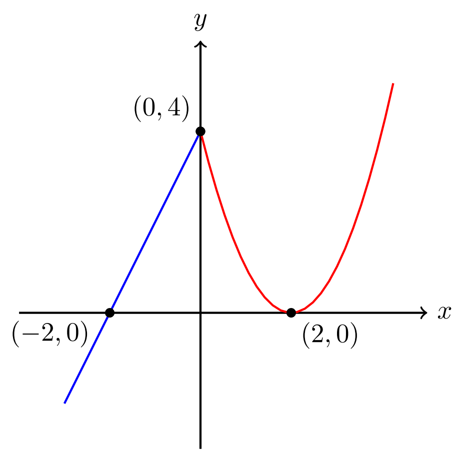
Como $-2<0$, el punto de corte con el eje de abscisas es $(-2,0)$.

Caso 2: $x \geq 0$

$$f(x)=(x-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

Como $2 \geq 0$, el punto de corte con el eje de abscisas es $(2,0)$.

A continuación, esbozamos la gráfica de la función:



Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Los puntos de corte de la gráfica de } f \text{ con el eje de abscisas son } (-2,0) \text{ y } (2,0).}$$

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

El área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas se calcula mediante la integral definida de la función en los intervalos donde la gráfica está entre los puntos de corte con el eje x.

Para $x < 0$, la función es $f(x) = 2x + 4$, y el punto de corte con el eje x es en $x = -2$. La gráfica está por encima del eje x en el intervalo $[-2, 0]$. El área del recinto en este intervalo es:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (2x + 4)dx.$$

Calculamos la integral:

$$A_1 = \left[x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} = (0^2 + 4(0)) - ((-2)^2 + 4(-2)) = 0 - (4 - 8) = 0 - (-4) = 4\ u^2.$$

El área del recinto para $x < 0$ es de 4 unidades cuadradas.

Para $x \geq 0$, la función es $f(x) = (x - 2)^2$, y el punto de corte con el eje x es en $x = 2$. La gráfica está por encima o sobre el eje x en el intervalo $[0, 2]$. El área del recinto en este intervalo es:

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x - 2)^2 dx = \int_{0}^{2} (x^2 - 4x + 4)dx.$$

Calculamos la integral:

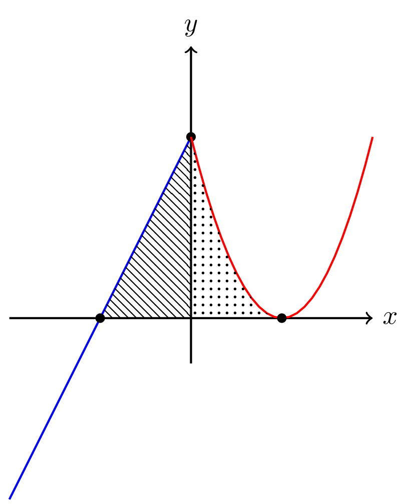
$$A_2 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_{0}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 2(2)^2 + 4(2)\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2(0)^2 + 4(0)\right) = \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - (0) = \frac{8}{3}\ u^2.$$

El área del recinto para $x \geq 0$ es de $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.

El área total del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas es la suma de las áreas de los dos recintos:

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}\ u^2.$$

A continuación, mostramos los recintos cuya área hemos calculado:



Por lo tanto, el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas es:

$$\boxed{\frac{20}{3} \text{ unidades cuadradas}}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considera la función f definida por $\mathbf{f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}}$ para $\mathbf{x \neq 1}$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $\mathbf{(2, 6)}$.

Solución:

Queremos encontrar una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$. Primero, notamos que el denominador se puede factorizar como $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Por lo tanto, la función es $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

Como el grado del numerador (3) es mayor que el grado del denominador (2), realizamos la división polinómica:

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3\right) \div \left(x^2 - 2x + 1\right) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}. \\
\underline{-x^3 + 2x^2 \quad - x} \\
\qquad 2x^2 \quad - x \\
\quad \underline{-2x^2 + 4x - 2} \\
\qquad\qquad 3x - 2
\end{array}
$$

De la división, obtenemos que

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Ahora, necesitamos integrar cada término. La integral de $x + 2$ es sencilla:

$$\int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1.$$

Para integrar la fracción $\frac{3x-2}{(x-1)^2}$, utilizamos la descomposición en fracciones parciales. Como el denominador es $(x-1)^2$, proponemos la siguiente forma:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Multiplicando ambos lados por $(x-1)^2$, obtenemos:

$$3x - 2 = A(x-1) + B \quad \Rightarrow \quad 3x - 2 = Ax - A + B.$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado:

- Coeficiente de x: $3 = A$
- Término constante: $-2 = -A + B$

Sustituyendo $A = 3$ en la segunda ecuación:

$$-2 = -3 + B \quad \Rightarrow \quad B = 3 - 2 = 1.$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ahora, integramos cada término:

$$\int \frac{3}{x-1}dx = 3\int \frac{1}{x-1}dx = 3\ln|x-1| + C_2,$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int (x-1)^{-2}dx = -\frac{1}{x-1} + C_3.$$

Sumando todas las integrales, la primitiva general de $f(x)$ es:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C,$$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3$ es la constante de integración.

Queremos encontrar la primitiva que pasa por el punto $(2,6)$, lo que significa que $F(2) = 6$. Sustituimos $x = 2$ en la expresión de $F(x)$:

$$6 = \frac{2^2}{2}+2(2)+3\ln|2-1|-\frac{1}{2-1}+C \quad \Rightarrow \quad 6 = \frac{4}{2}+4+3\ln|1|-\frac{1}{1}+C \quad \Rightarrow \quad 6 = 2+4+3(0)-1+C \quad \Rightarrow \quad 6 = 5+C.$$

Despejando la constante C:

$$C = 6 - 5 = 1.$$

Por lo tanto, la primitiva de $\mathbf{f(x)}$ que pasa por el punto $(\mathbf{2}, \mathbf{6})$ es:

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + 1}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) **Discute el sistema según los valores de m.**
b) **Para m = 2 resuelve el sistema, si es posible.**

Solución:

a) **Discute el sistema según los valores de m.**

Las ecuaciones del sistema pueden escribirse en forma matricial como

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{array}\right).$$

Para aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius, primero calculamos $\det(A)$ y lo igualamos a cero.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & m \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + m \cdot \begin{vmatrix} -m & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (3m - 4) + 1 \cdot (-m^2 - (-1)) + m \cdot (4m - 3) \\ &= 3m - 4 - m^2 + 1 + 4m^2 - 3m \\ &= 3m^2 - 3. \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores de m para los cuales el rango de A no es 3:

$$3m^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = 1 \quad \text{o} \quad m = -1.$$

Discusión del sistema según los valores de m:

- Caso 1: $m \neq 1$ y $m \neq -1$. En este caso, $\det(A) \neq 0$, por lo que $\text{rango}(A) = 3$. Como la matriz ampliada A^* tiene 3 filas, su rango también es 3. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).
- Caso 2: $m = 1$. Sustituimos $m = 1$ en las matrices A y A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

Sabemos que $\det(A) = 0$ para $m = 1$, por lo que $\text{rango}(A) < 3$. Consideramos el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\text{rango}(A) = 2$.

Ahora calculamos el rango de A^*. Consideramos el determinante de la submatriz formada por las columnas 1, 2 y 4 de A^*:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 1(-18-(-4)) - (-1)(6-1) + (-3)(4-3) = -14+5-3 = -12 \neq 0.$$

Como existe un menor de orden 3 no nulo en A^*, $\text{rango}(A^*) = 3$. Dado que $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible (no tiene solución).

– Caso 3: $m = -1$. Sustituimos $m = -1$ en las matrices A y A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right).$$

Sabemos que $\det(A) = 0$ para $m = -1$, por lo que $\text{rango}(A) < 3$. Consideramos el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-1) = 4 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\text{rango}(A) = 2$.

Ahora calculamos el rango de A^*. Consideramos el determinante de la submatriz formada por las columnas 1, 2 y 4 de A^*:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 1(-18-(-4)) - (-1)(-6-1) + (-3)(-4-3) = -14-7+21 = 0.$$

Como no existe un menor de orden 3 no nulo en A^*, $\text{rango}(A^*) = 2$. Dado que $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) < 3$, el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Por lo tanto, la discusión del sistema es:

$m \neq 1, -1$	$\Rightarrow$	Sistema Compatible Determinado
$m = 1$	$\Rightarrow$	Sistema Incompatible
$m = -1$	$\Rightarrow$	Sistema Compatible Indeterminado

b) Para $\mathbf{m = 2}$ resuelve el sistema, si es posible.

Para $m = 2$, el sistema es compatible determinado. La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

y el vector de términos independientes es $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$. El determinante de A para $m = 2$ es $\det(A) = 3(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$. Como $\det(A) \neq 0$, podemos usar la Regla de Cramer.

Para encontrar x, reemplazamos la primera columna de A por b:

$$A_x = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A_x) = -3(6-4) - (-1)(2-6) + 2(-4-(-18)) = -3(2) + 1(-4) + 2(14) = -6 - 4 + 28 = 18,$$
$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{18}{9} = 2.$$

Para encontrar y, reemplazamos la segunda columna de A por b:

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\det(A_y) = 1(2-6) - (-3)(-4-(-1)) + 2(12-1) = 1(-4) + 3(-3) + 2(11) = -4 - 9 + 22 = 9,$$
$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{9}{9} = 1.$$

Para encontrar z, reemplazamos la tercera columna de A por b:

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix},$$
$$\det(A_z) = 1(-18-(-4)) - (-1)(12-1) + (-3)(8-3) = 1(-14) + 1(11) - 3(5) = -14 + 11 - 15 = -18,$$
$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-18}{9} = -2.$$

Por lo tanto, para m = 2, la solución del sistema es:

$$\boxed{(x, y, z) = (2, 1, -2)}$$

Ejercicio 6. Álgebra

Considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$**, donde** $\mathbf{m \geq 0}$**.**

a) **¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?**
b) **Para $\mathbf{m = 4}$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\mathbf{AX = 12I}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.**

Solución:

a) **¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?**

Una matriz tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} \\
&= m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \sqrt{m}\begin{vmatrix} \sqrt{m} & 1 \\ \sqrt{m} & m \end{vmatrix} + \sqrt{m}\begin{vmatrix} \sqrt{m} & m \\ \sqrt{m} & 1 \end{vmatrix} \\
&= m(m^2-1) - \sqrt{m}(m\sqrt{m} - \sqrt{m}) + \sqrt{m}(\sqrt{m} - m\sqrt{m}) \\
&= m^3 - m - \sqrt{m}\cdot\sqrt{m}(m-1) + \sqrt{m}\cdot\sqrt{m}(1-m) \\
&= m^3 - m - m(m-1) + m(1-m) \\
&= m^3 - m - m^2 + m + m - m^2 \\
&= m^3 - 2m^2 + m \\
&= m(m^2 - 2m + 1) \\
&= m(m-1)^2.
\end{aligned}$$

La matriz A tiene inversa si y solo si $\det(A) \neq 0$, es decir, $m(m-1)^2 \neq 0$. Esto ocurre si y solo si $m \neq 0$ y $(m-1)^2 \neq 0$, lo que implica $m \neq 1$. Como se nos da que $m \geq 0$, los valores de m para los que la matriz A tiene inversa son todos los $m \geq 0$ tales que $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

Por lo tanto, la matriz A tiene inversa para:

$$\boxed{m \geq 0 \text{ excepto } m = 0 \text{ y } m = 1}$$

b) **Para $\mathbf{m = 4}$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\mathbf{AX = 12I}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.**

Para $m = 4$, la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{4} & \sqrt{4} \\ \sqrt{4} & 4 & 1 \\ \sqrt{4} & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para $m = 4$, el determinante de A es $\det(A) = 4(4-1)^2 = 4(3)^2 = 4(9) = 36 \neq 0$. Por lo tanto, la matriz A tiene inversa y la ecuación matricial $AX = 12I$ tiene una única solución dada por $X = A^{-1}(12I) = 12A^{-1}I = 12A^{-1}$.

Primero, calculamos la matriz inversa A^{-1}. Para ello, necesitamos la matriz adjunta de A. La matriz de cofactores de A es:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15,$$
$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 2) = -6,$$
$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6,$$
$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 2) = -6,$$
$$C_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12,$$
$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 4) = 0,$$
$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6,$$
$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 4) = 0,$$
$$C_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12.$$

La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. La matriz adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

La inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Ahora calculamos $X = 12A^{-1}$:

$$X = 12 \cdot \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{3} & \frac{-6}{3} & \frac{-6}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{12}{3} & \frac{0}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{0}{3} & \frac{12}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para m = 4, la solución de la ecuación matricial es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 7. Geometría

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto A$(-4, 4, 7)$.

a) **Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

b) **Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.**

Solución:

a) **Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Para que el vector $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1)(-1) + (a)(2) + (b)(3) = -1 + 2a + 3b = 0.$$

Para que el vector $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{v}$, su producto escalar debe ser cero:

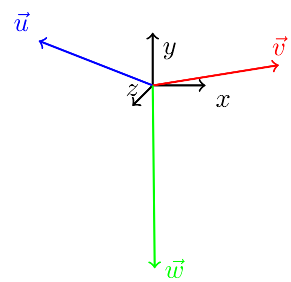
$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (a)(0) + (b)(-1) = 2 - b = 0.$$

De la segunda ecuación, obtenemos directamente el valor de b:

$$2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2.$$

Sustituimos el valor de b en la primera ecuación para encontrar a:

$$-1 + 2a + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = -5 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{5}{2}.$$



Por lo tanto, los valores son:

$$\boxed{a = -\frac{5}{2}, \quad b = 2}$$

b) **Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.**

Sea el paralelogramo de vértices O, B, A, D. Los lados $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OD}$ tienen las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Esto significa que $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{u}$ y $\overrightarrow{OD} = \mu\vec{v}$ para algunos escalares λ y μ. La diagonal $\overrightarrow{OA}$ se forma por la suma de los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OD}$:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}.$$

Sustituyendo las expresiones de los vectores:

$$\lambda(-1, 2, 3) + \mu(2, 0, -1) = (-4, 4, 7) \quad \Rightarrow \quad (-\lambda + 2\mu, 2\lambda, 3\lambda - \mu) = (-4, 4, 7).$$

Igualando las componentes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu & = -4 \\ 2\lambda & = 4 \\ 3\lambda - \mu & = 7 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, encontramos λ:

$$2\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Sustituimos $\lambda = 2$ en la primera ecuación:

$$-2 + 2\mu = -4 \quad \Rightarrow \quad 2\mu = -2 \quad \Rightarrow \quad \mu = -1.$$

Verificamos que estos valores de λ y μ satisfacen la tercera ecuación:

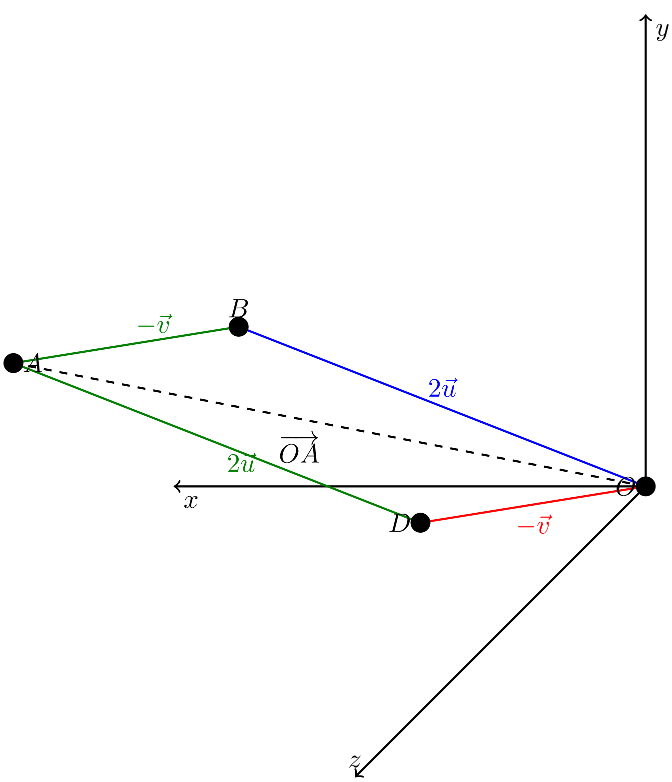
$$3(2) - (-1) = 6 + 1 = 7.$$

La tercera ecuación también se cumple. Ahora podemos encontrar los vértices del paralelogramo. Un vértice es el origen $O(0,0,0)$. Los otros dos vértices adyacentes al origen son:

$$B = \overrightarrow{OB} = \lambda\vec{u} = 2(-1,2,3) = (-2,4,6),$$

$$D = \overrightarrow{OD} = \mu\vec{v} = -1(2,0,-1) = (-2,0,1).$$

El cuarto vértice A es el punto dado $(-4,4,7)$, que es el extremo de la diagonal $\overrightarrow{OA}$.



Por lo tanto, los cuatro vértices del paralelogramo son:

$$\boxed{O(0,0,0), \quad B(-2,4,6), \quad A(-4,4,7), \quad D(-2,0,1)}$$

Ejercicio 8. Geometría

Considera la recta r $\equiv$ x $-$ 2 $= \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto P$(1,2,3)$ y el vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$.

a) **Calcula a para que las rectas r y s se corten.**
b) **Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.**

Solución:

a) **Calcula a para que las rectas r y s se corten.**

Primero, expresamos la recta r en forma paramétrica. Igualando la expresión dada a un parámetro λ, tenemos:

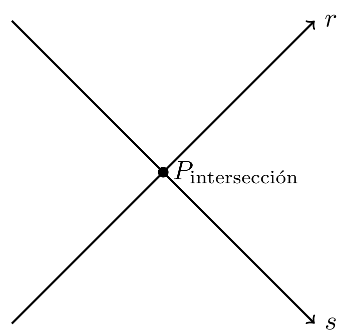
$$x-2=\lambda \quad \Rightarrow \quad x=2+\lambda,$$
$$\frac{y}{-1}=\lambda \quad \Rightarrow \quad y=-\lambda,$$
$$\frac{z-1}{2}=\lambda \quad \Rightarrow \quad z=1+2\lambda.$$

Así, la recta r puede escribirse como $(x,y,z)=(2+\lambda,-\lambda,1+2\lambda)$. Un punto de la recta r es $R(2,0,1)$ y su vector director es $\vec{d_r}=(1,-1,2)$.

Ahora, expresamos la recta s en forma paramétrica. Sabiendo que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y tiene vector director $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$, su ecuación paramétrica es:

$$x=1+\mu(1+a),$$
$$y=2+\mu(-a)=2-a\mu,$$
$$z=3+\mu(3a).$$

Así, la recta s puede escribirse como $(x,y,z)=(1+\mu(1+a),2-a\mu,3+3a\mu)$.



Para que las rectas r y s se corten, debe existir un punto común, es decir, deben existir valores de λ y μ tales que las coordenadas sean iguales:

$$2+\lambda=1+\mu(1+a),$$
$$-\lambda=2-a\mu,$$
$$1+2\lambda=3+3a\mu.$$

De la segunda ecuación, tenemos $\lambda=-2+a\mu$. Sustituimos esta expresión de λ en la primera ecuación:

$$2+(-2+a\mu)=1+\mu(1+a) \quad \Rightarrow \quad a\mu=1+\mu+a\mu \quad \Rightarrow \quad 0=1+\mu \quad \Rightarrow \quad \mu=-1.$$

Ahora sustituimos $\lambda=-2+a\mu$ y $\mu=-1$ en la tercera ecuación:

$$1+2(-2+a(-1))=3+3a(-1) \quad \Rightarrow \quad 1-4-2a=3-3a-3-2a=3-3a \quad \Rightarrow \quad 3a-2a=3+3 \quad \Rightarrow \quad a=6.$$

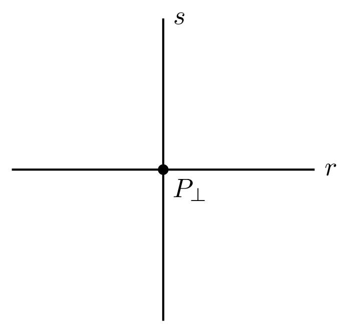
Por lo tanto, las rectas r y s se cortan para:

$$\boxed{a = 6}$$

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

Calculamos el producto escalar de $\vec{d_r}$ y $\vec{v}$ e igualamos a cero:

$$\vec{d_r} \cdot \vec{v} = (1)(1+a) + (-1)(-a) + (2)(3a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + a + a + 6a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8}.$$



Por lo tanto, las rectas r y s son perpendiculares para:

$$\boxed{a = -\frac{1}{8}}$$